MUAMMOLI EHTIMOLLIK MASALALARI ORQALI O‘QUVCHILARNING MATEMATIK TAFAKKURINI RIVOJLANTIRISH METODIKASI

Ismoilova Zeboxon Zokir qizi,
Shahrisabz davlat pedagogika instituti
Aniq va tabiiy fanlarni o‘qitish metodikasi
(matematika) mutaxassisligi magistranti
zeboxonismoilova6@gmail.com
Ismoilova Chaman Davron qizi,
Shahrisabz davlat pedagogika instituti
Aniq va tabiiy fanlarni o‘qitish metodikasi
(matematika) mutaxassisligi magistranti
chamanismoilova01@gmail.com

Maqolada umumiy o‘rta ta’lim yuqori sinflari va akademik litseylarda ehtimollar nazariyasi elementlarini o‘qitish jarayonida muammoli ehtimollik masalalaridan foydalanib, o‘quvchilarning matematik tafakkurini rivojlantirish metodikasi yoritilgan. “Muammoli ehtimollik masalasi” tushunchasining mohiyati ochib berilgan, uning didaktik belgilari aniqlangan, ehtimoliy fikrlashda uchraydigan tipik xatolar tahlil qilingan. Besh bosqichli metodik model (“taxmin – tajriba – model – asoslash – refleksiya”) taklif etilgan va u Galiley masalasi, tavallud kunlari masalasi, uch eshik masalasi hamda shartli ehtimollik masalasi misolida bayon qilingan. O‘quvchilarning ehtimoliy tafakkur darajasini baholash mezonlari ishlab chiqilgan.

Kalit so‘zlar: *ehtimollik, muammoli masala, matematik tafakkur, kompyuter simulyatsiyasi, ehtimollik daraxti, shartli ehtimollik, o‘qitish metodikasi, tanqidiy fikrlash.*

МЕТОДИКА РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПОСРЕДСТВОМ ПРОБЛЕМНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

В статье рассматривается методика развития математического мышления учащихся старших классов общеобразовательных школ и академических лицеев посредством проблемных вероятностных задач. Раскрыта сущность понятия «проблемная вероятностная задача», выделены её дидактические признаки, проанализированы типичные ошибки вероятностного мышления. Предложена пятиэтапная методическая модель («гипотеза – эксперимент – модель – обоснование – рефлексия»), которая проиллюстрирована на примере задачи Галилея, задачи о днях рождения, задачи о трёх дверях и задачи на условную вероятность. Разработаны критерии оценивания уровня сформированности вероятностного мышления учащихся.

Ключевые слова: *вероятность, проблемная задача, математическое мышление, компьютерное моделирование, дерево вероятностей, условная вероятность, методика обучения, критическое мышление.*

METHODOLOGY FOR DEVELOPING STUDENTS' MATHEMATICAL THINKING THROUGH PROBLEMATIC PROBABILITY PROBLEMS

The article describes a methodology for developing the mathematical thinking of upper-secondary and academic lyceum students through problem-based probability tasks. The essence of the notion of a “problem-based probability task” is clarified, its didactic features are identified, and typical errors of probabilistic reasoning are analysed. A five-stage methodological model (“conjecture – experiment – model – justification – reflection”) is proposed and illustrated by Galileo’s dice problem, the birthday problem, the three-door (Monty Hall) problem and a conditional-probability problem. Criteria for assessing the level of students’ probabilistic thinking are developed.

Keywords: *probability, problem-based task, mathematical thinking, computer simulation, probability tree, conditional probability, teaching methodology, critical thinking.*

Kirish. Zamonaviy jamiyatda noaniqlik sharoitida qaror qabul qilish insonning kundalik va kasbiy faoliyatining ajralmas qismiga aylandi. Ob-havo prognozi, moliyaviy xatarlarni baholash, tekshiruv natijalarini talqin qilish, ommaviy axborot vositalarida keltirilgan statistik ma’lumotlarga tanqidiy

yondashish — bularning barchasi ehtimoliy fikrlashni talab qiladi. O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonunida ta’lim sifatini oshirish, o‘quvchilarning mustaqil va ijodiy fikrlashini rivojlantirish davlat siyosatining ustuvor yo‘nalishlari sifatida belgilangan [1]. Xalq ta’limi tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasida ham o‘quvchilarda mustaqil fikrlash va funksional savodxonlik ko‘nikmalarini shakllantirish, ta’lim sifatini xalqaro mezonlar darajasiga olib chiqish vazifasi ilgari surilgan [2]. Shu sababli ehtimollar nazariyasi elementlari maktab matematika kursining zaruriy tarkibiy qismiga aylangan. Xalqaro baholash dasturi PISA doirasidagi matematik savodxonlik konsepsiyasida “noaniqlik va ma’lumotlar” alohida mazmun yo‘nalishi sifatida ajratilgan [3], AQShning NCTM standartlarida esa “ma’lumotlarni tahlil qilish va ehtimollik” maktab matematikasining asosiy standartlaridan biri hisoblanadi [4]. Biroq amaliyotda ehtimollik mavzulari ko‘pincha formulalarni yodlash va tayyor namuna bo‘yicha masala yechishga olib kelinadi. Natijada o‘quvchi klassik ehtimollik formulasini bilsa-da, oddiy vaziyatda o‘z sezgisiga ishonib, noto‘g‘ri xulosaga keladi.

Adabiyotlar tahlili va metodologiya. Muammoli ta’lim nazariyasida muammoli vaziyat o‘quvchi mavjud bilim va usullarining yetarli emasligini anglagan paytdagi intellektual qiyinchilik holati sifatida talqin qilinadi, shu holat izlanish faoliyatining boshlanishi bo‘lib xizmat qiladi [5]. D. Poya matematik kashfiyotda “ishonarli mulohazalar”, ya’ni taxmin qilish va uni tekshirishning o‘rni beqiyos ekanini ko‘rsatdi, masala yechishning “tushunish – reja tuzish – amalga oshirish – orqaga nazar tashlash” bosqichlarini tavsiflab berdi [6; 7]. A.N. Kolmogorov aksiomatikasi ehtimollar nazariyasining qat’iy mantiqiy asosini yaratdi [8], biroq bu qat’iy qurilmani o‘quvchi dastlabki tajribaviy asossiz o‘zlashtira olmaydi. E. Fishbeyn ehtimoliy tafakkurning sezgiviy manbalarini o‘rganib, intuitiv g‘oyalar rasmiy ta’limdan oldin shakllanishi va ular tizimli ravishda qayta ishlanmasa, mustahkam qolishini ko‘rsatdi [9]. D. Kaneman va A. Tverskiy odamlar noaniqlik sharoitida reprezentativlik kabi evristikalarga tayanib, tizimli xatolarga yo‘l qo‘yishini asoslab berdi [10]. J. Shonnesi ehtimollik bo‘yicha tadqiqotlarni umumlashtirib, o‘quvchilarning noto‘g‘ri tasavvurlari tadqiqot va o‘qitishning markaziy obyekti bo‘lishi lozimligini ta’kidladi.

Mavjud tadqiqotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, ehtimollikni o‘qitishda sezgi, tajriba va nazariy model o‘rtasidagi bog‘liqlikni izchil ta’minlaydigan, o‘quvchi faoliyati bosqichlari aniq belgilangan va baholash mezonlari bilan to‘ldirilgan metodik tizimga ehtiyoj saqlanib qolmoqda. Tadqiqotda nazariy tahlil, masalalarni didaktik tahlil qilish, matematik modellashtirish, kompyuter simulyatsiyasi (Python dasturlash tili) hamda pedagogik kuzatish usullaridan foydalanildi. 1-jadvalda adabiyotlarda tavsiflangan [9] tipik xatolar va ularni bartaraf etishga xizmat qiluvchi muammoli masalalar keltirilgan.

1-jadval.

Xato	Mohiyati	Muammoli masala
Teng imkoniyatlilik xatosi	Turli yo‘llar bilan hosil bo‘ladigan natijalarni teng ehtimolli deb hisoblash	Galiley masalasi (uchta o‘yin kubigi)
Reprezentativlik evristikasi	Ketma-ketlikning ehtimolligini uning “tasodifiyga o‘xshashligi” bilan baholash	Tanga tashlashda GGGGGG va GRGRRG ketma-ketliklari
Qimorboz xatosi	Oldingi natijalar keyingi tajribaga ta’sir qiladi deb o‘ylash	Besh marta ketma-ket gerb tushgach, oltinchi tashlashda gerb tushish ehtimolligi
Moslashuv ehtimolligini kam baholash	Tasodifiy mos kelishlar soni va ehtimolligini sezgi bilan kam baholash	Tavallud kunlari masalasi
Axborotni yangilashni tushunmaslik	Yangi axborot kelgach, qolgan variantlarni avtomatik “teng” deb hisoblash	Uch eshik masalasi
Bazaviy chastotani e’tiborsiz qoldirish	Shartli ehtimollikda hodisaning dastlabki uchrash chastotasini hisobga olmaslik	Nazorat qurilmasi signali masalasi

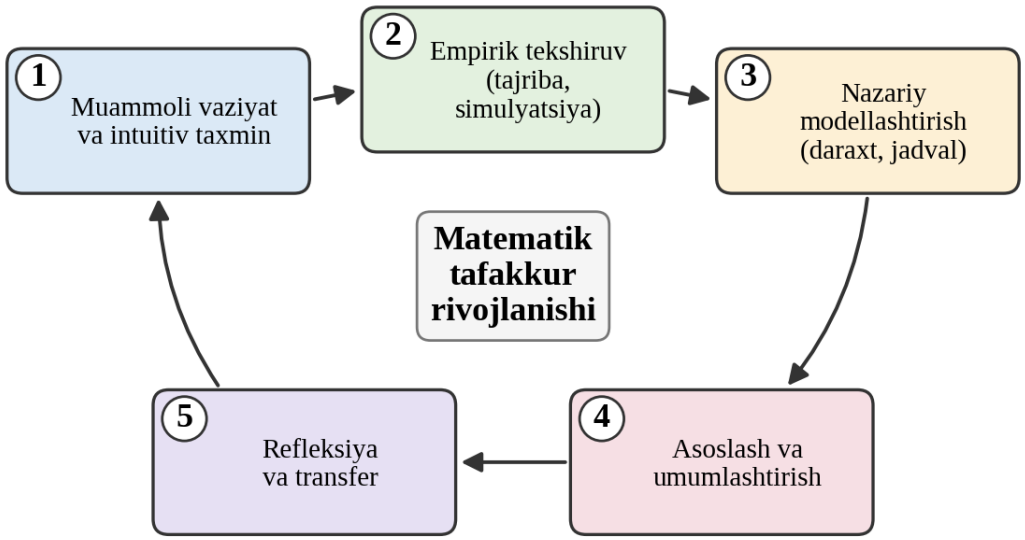
Natijalar va muhokama

1. Muammoli ehtimollik masalasining mohiyati va didaktik belgilari

Tadqiqot natijasida muammoli ehtimollik masalasi deganda o‘quvchining intuitiv javobi nazariy javobdan farq qiladigan, bu qarama-qarshilik esa o‘quvchida kognitiv nizo uyg‘otib, uni tekshirish, modellashtirish va asoslashga undaydigan masala tushunildi.

2. Besh bosqichli metodik model

Taklif etilayotgan metodik model muammoli ta’lim [5], Poyaning ishonarli mulohazalar g‘oyasi [6; 7] va ehtimollikni o‘qitish bo‘yicha zamonaviy tavsiyalarga tayanadi (1-rasm). Modelning bosqichlari quyidagicha.



1-rasm. Muammoli ehtimollik masalalari orqali tafakkurni rivojlantirishning besh bosqichli metodik modeli (muallif ishlanmasi)

3. Metodik modelni amaliyotda qo‘llash: masalalar tizimi

Masalalar kombinatorik asosdan boshlab, tobora murakkab tushunchalar — mos kelishlar, axborotning yangilanishi va shartli ehtimollik tomon joylashtiriladi.

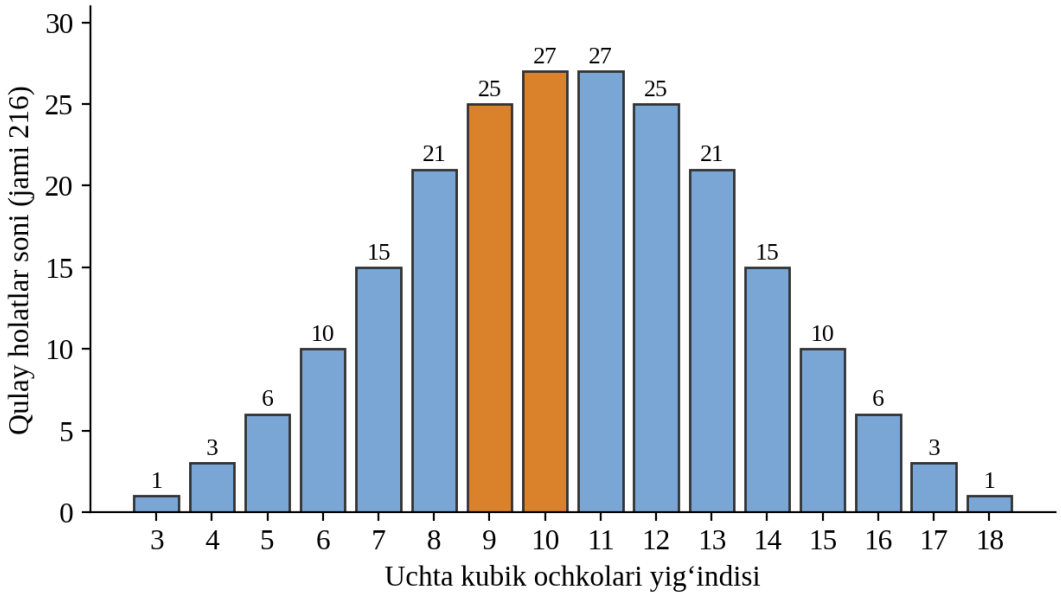
1-masala (Galiley masalasi). *Uchta o‘yin kubigi tashlanganda ochkolar yig‘indisi 9 bo‘lishini ham, 10 bo‘lishini ham to‘g‘ri keladigan uch sonli tarkib bilan 6 xil usulda hosil qilish mumkin. Nega amalda 10 yig‘indisi 9 ga qaraganda ko‘proq uchraydi?*

1-bosqich. Ko‘pchilik o‘quvchi “6 ta usul va 6 ta usul — demak, ehtimolliklar teng” deb javob beradi. Bu teng imkoniyatlilik xatosining tipik namunasidir. *2-bosqich.* Tajribada farq juda kichik: nazariy ehtimolliklar farqi taxminan 0,009 ni tashkil etadi, shuning uchun 100–200 ta tashlashda farqni aniqlab bo‘lmaydi — o‘quvchilar katta sonli tajribalar zarurligini anglaydi. *3–4-bosqich.* Kubiklar farqlanadigan deb qaralsa, har bir tarkib turli tartibda hosil bo‘ladi (2-jadval).

2-jadval. Uchta kubik tashlanganda yig‘indi 9 va 10 ni hosil qiluvchi tarkiblar

Yig‘indi 9: tarkib	Tartiblar soni	Yig‘indi 10: tarkib	Tartiblar soni
1+2+6	6	1+3+6	6
1+3+5	6	1+4+5	6
1+4+4	3	2+2+6	3
2+2+5	3	2+3+5	6
2+3+4	6	2+4+4	3
3+3+3	1	3+3+4	3
Jami	**25**	**Jami**	**27**

Demak, $P(9) = 25/216 \approx 0{,}116$, $P(10) = 27/216 = 0{,}125$ (2-rasm). *5-bosqich.* O‘quvchilar xatoning sababini — “tarkib” bilan “tartiblangan natija”ni aralashtirib yuborganini — ifodalaydi va shu g‘oyani ikki kubik yig‘indisining taqsimotiga, hamda ushbu masalaning “11 va 12” varianti uchun qo‘llaydi (u ham uchta kubik uchun 27 va 25 natija beradi).



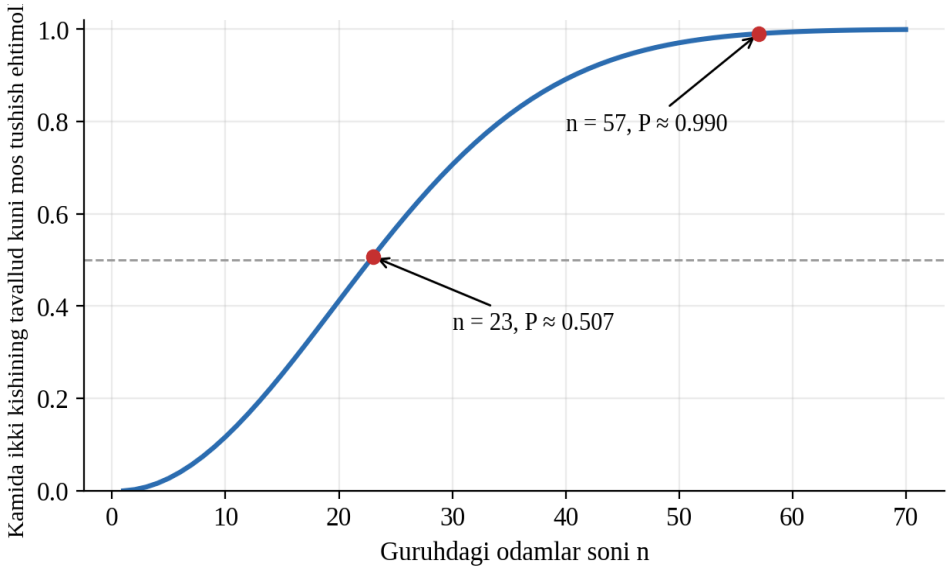
2-rasm. Uchta kubik ochkolari yig‘indisining taqsimoti (qulay holatlar soni, jami 216 ta)

2-masala (tavallud kunlari masalasi). *30 nafar o‘quvchidan iborat sinfda kamida ikki o‘quvchining tavallud kuni (kun va oy) mos tushish ehtimolligi qancha?*

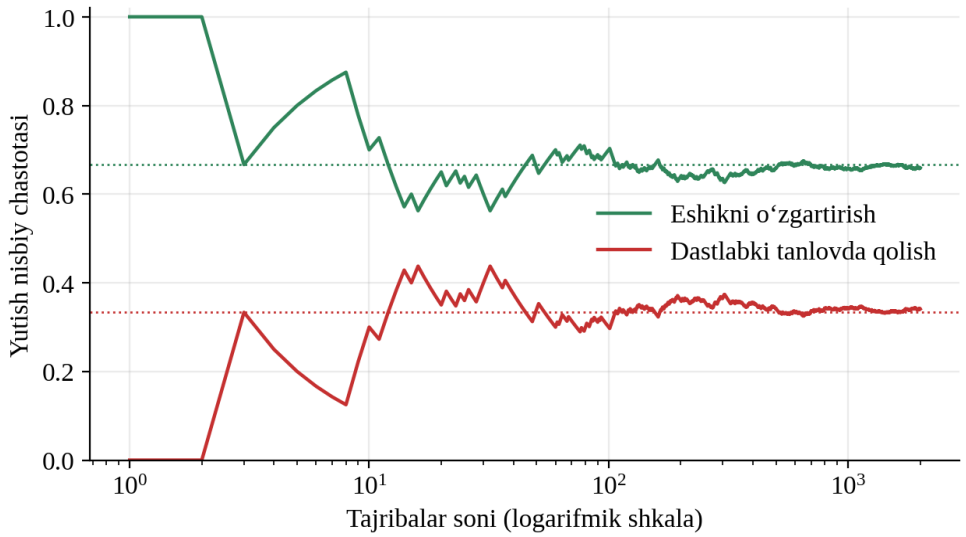
1-bosqich. Ko‘pchilik o‘quvchi “yil 365 kun, o‘quvchi atigi 30 ta — ehtimollik juda kichik” deb baholaydi. *2-bosqich.* Sinfdagi haqiqiy tavallud kunlari ro‘yxati tuziladi va bir nechta sinf ma’lumotlari taqqoslanadi. *3-bosqich.* Qarama-qarshi hodisaga o‘tamiz: barcha n nafar odamning tavallud kunlari turlicha bo‘lish ehtimolligi

$$P(\text{turli}) = (365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)) / 365\text{^}n,$$

izlanayotgan ehtimollik esa $1 - P(\text{turli})$ ga teng. Modelning farazlari: yilning barcha kunlari teng imkoniyatli, 29-fevral e’tiborga olinmaydi, tug‘ilish kunlari bog‘liq emas.



3-rasm. Guruhda kamida ikki kishining tavallud kuni mos tushish ehtimolligining guruh hajmiga bog‘liqligi



4-rasm. Uch eshik masalasining kompyuter simulyatsiyasi natijalari (2000 ta tajriba)

4-bosqich. Hisob-kitoblar natijasi (3-rasm): n = 23 da ehtimollik taxminan 0,507; n = 30 da taxminan 0,706; n = 57 da esa 0,99 dan oshadi. Sezgi bilan natija o‘rtasidagi ziddiyatni tushuntirish uchun o‘quvchilar n = 23 bo‘lganda juftliklar soni $23 \cdot 22/2 = 253$ ekanini hisoblaydi: mos kelish imkoniyati alohida odamlar soni bilan emas, balki juftliklar soni bilan bog‘liq. *5-bosqich.* O‘quvchilar “bir xil ism”, “bir xil tug‘ilgan oy” kabi o‘z moslik masalalarini tuzib, ehtimolligini baholaydi. Modelning real hayotdagi farqlari (tug‘ilish kunlari bir tekis taqsimlanmagani) muhokama qilinadi — bu o‘quvchida modelning chegaralarini anglash ko‘nikmasini shakllantiradi.

Xulosa. Tadqiqot natijalari quyidagi xulosalarga kelish imkonini berdi. *Birinchidan,* muammoli ehtimollik masalasi — o‘quvchining intuitiv va nazariy javoblari orasidagi ziddiyatga asoslangan, tajribaviy tekshirish, ko‘p shaklda tasvirlash va umumlashtirishga imkon beruvchi masala sifatida aniqlashtirildi. *Ikkinchidan,* ehtimoliy tafakkurdagi tipik xatolar (teng imkoniyatlilik, reprezentativlik, qimorboz xatosi, axborotni yangilashni tushunmaslik, bazaviy chastotani e’tiborsiz qoldirish) tasniflanib, ularga mos masalalar tizimi ishlab chiqildi. *Uchinchidan,* o‘quvchi faoliyatini boshqaruvchi besh bosqichli metodik model (taxmin – tajriba – model – asoslash – refleksiya) taklif etildi va u Galiley masalasi, tavallud kunlari masalasi, uch eshik masalasi hamda shartli ehtimollik masalasida namoyish etildi. *To‘rtinchidan,* o‘quvchilarning ehtimoliy tafakkurini baholash uchun beshta mezon va uch darajali shkala ishlab chiqildi.

Adabiyotlar:

1. O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni. 2020-yil 23-sentabr, O‘RQ-637-son.
2. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 29-apreldagi PF-5712-sonli Farmoni “O‘zbekiston Respublikasi xalq ta’limi tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”.
3. OECD. PISA 2022 Assessment and Analytical Framework. – Paris: OECD Publishing, 2023.
4. National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standards for School Mathematics. – Reston, VA: NCTM, 2000.
5. Махмутов М.И. Проблемное обучение: основные вопросы теории. – М.: Педагогика, 1975.
6. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1959.
7. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.
8. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974.
9. Fischbein E. The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. – Dordrecht: Reidel, 1975.
10. Kahneman D., Tversky A. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases // Science. – 1974. – Vol. 185, No. 4157. – P. 1124–1131.